

## ~ CURS 5 ~

### ***D. Puteri în regim permanent sinusoidal***

Spre deosebire de regimul de curent continuu (unde aveam de-a face doar cu puterea electrică activă), în regim permanent sinusoidal întâlnim mai multe tipuri de puteri electrice.

**Puterea instantanee** –  $p$ , se definește ca puterea primită în fiecare moment la borne de un dipol și se calculează ca produsul dintre valorile instantanee ale tensiunii și curentului electric, conform formulei:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = UI \cdot [\cos(\varphi_U - \varphi_I) - \cos(2\omega t + \varphi_U + \varphi_I)] \quad (1.69)$$

În această formulă se pot deosebi doi termeni: un termen constant ce caracterizează schimbul mediu de putere al dipolului cu exteriorul și un termen alternativ de frecvență dublă față de cea a tensiunii aplicate.

**Puterea activă** –  $P$ , se poate defini ca valoarea medie a puterii instantanee pe durata unei perioade:

$$P = \langle p \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p(t) dt = UI \cos(\varphi_U - \varphi_I) = U \cdot I \cdot \cos \varphi \quad [\text{W}] \quad (1.70)$$

Puterea activă este caracteristică rezistoarelor, având ca unitate de măsură watt-ul (W):

$$P = R \cdot I^2 = G \cdot U^2 \quad (1.71)$$

**Puterea reactivă** –  $Q$ , se definește prin analogie cu puterea activă:

$$Q = U \cdot I \cdot \sin \varphi \quad [\text{VAR}] \quad (1.72)$$

Spre deosebire de puterea activă, puterea reactivă își schimbă semnul în funcție de defazajul unghiului  $\varphi$ . Cum am mai discutat anterior,  $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  în funcție de regimul de funcționare a dipolului. Astfel, în acest interval  $\cos \varphi$  este întotdeauna pozitiv, în timp ce  $\sin \varphi$  poate avea și valori pozitive și negative.

**Puterea aparentă** –  $S$ , se definește ca produsul dintre valorile efective ale tensiunii și curentului, având ca unitate de măsură volt-amperul (VA):

$$S = U \cdot I \quad [\text{VA}] \quad (1.73)$$

Puterea aparentă poate fi exprimată ca și celelalte două și în funcție de imitanțele dipolului liniar pasiv:

$$S = Z \cdot I^2 = Y \cdot U^2 \quad (1.74)$$

Puterea aparentă poate fi considerată ca fiind un indicator al funcționării circuitului pentru maximul puterii active (regimul pur rezistiv –  $\varphi = 0$ ) sau al puterii reactive (regimul pur inductiv –  $\varphi = \pi/2$ ). Astfel, putem defini triunghiul puterilor activă, reactivă și aparentă (fig. 1.29):

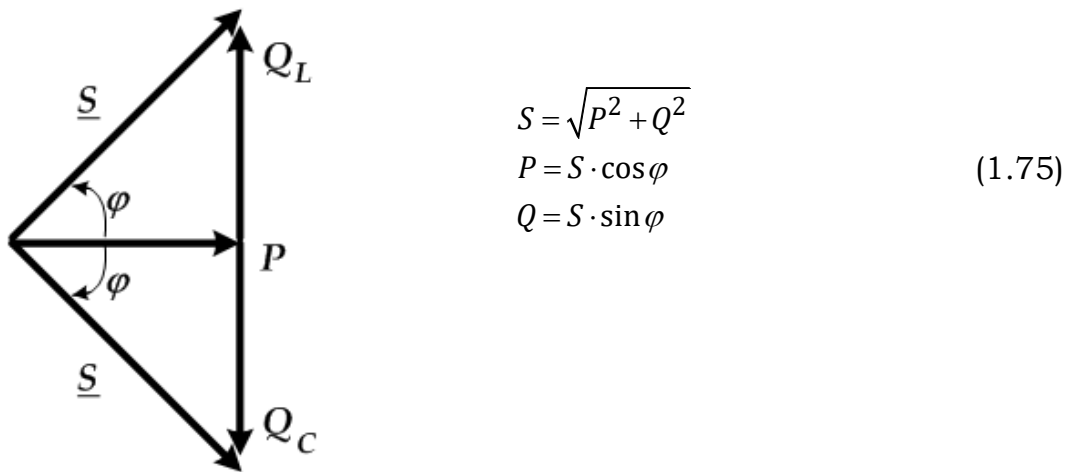


Fig. 1.29. Triunghiul puterilor

Putem defini o mărime foarte importantă din punct de vedere energetic, factorul de putere,  $k_p$ , ce este raportul dintre puterea activă și cea aparentă:

$$k_p = \frac{P}{S} = \frac{S \cdot \cos \varphi}{S} = \cos \varphi \in [0,1] \quad (1.76)$$

Correspondentul acestor puteri în domeniul complex este **puterea aparentă complexă**,  $\underline{S}$ , definită ca produsul între valoarea în complex a tensiunii la bornele dipolului și valoarea în complex conjugată a intensității curentului electric:

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = S \cdot e^{j\varphi} = S \cdot (\cos \varphi + j \sin \varphi) = P + jQ \quad (1.77)$$

relație din care putem observa ca partea reală a puterii aparente este egală cu puterea activă, iar partea imaginară este egală cu puterea reactivă:

$$\begin{aligned} |\underline{S}| &= S \\ P &= \text{Re}\{\underline{S}\} \\ Q &= \text{Im}\{\underline{S}\} \end{aligned} \quad (1.78)$$

### E. Elemente de circuit în regim permanent sinusoidal

În regim permanent sinusoidal există atât elemente de circuit pasive, reprezentate de rezistoare, bobine și condensatoare, cât și elemente active, reprezentate de sursele de curent și de tensiune.

#### a) Rezistorul ideal

Rezistorul electric are aceeași reprezentare ca și în curent continuu, în figura 1.30. fiind exemplificat atât în domeniul timp (a), cât și în complex (b).

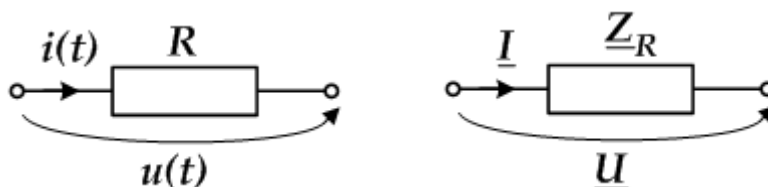


Fig. 1.30. Rezistorul ideal, reprezentare în domeniul timp (a), respectiv în complex (b)

Relațiile de bază pentru rezistor sunt reprezentate de legea lui Ohm:

$$\begin{aligned} u(t) &= R \cdot i(t) & - & \text{ecuația de funcționare în domeniul timp;} \\ \underline{U} &= \underline{Z}_R \cdot \underline{I}, \quad \underline{Z}_R = R & - & \text{ecuația de funcționare în domeniul complex.} \end{aligned} \quad (1.79)$$

Cum rezistența unui rezistor este un număr real, pozitiv, trebuie remarcat faptul că **rezistorul nu introduce defazaj între tensiune și curent** (fig. 1.31).

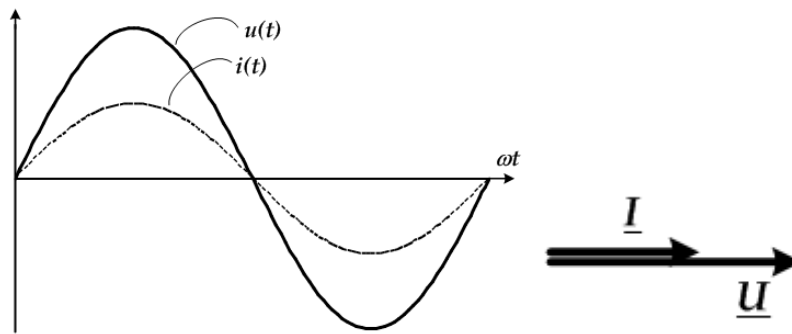


Fig. 1.31. Defazajul între tensiune și curent pentru un rezistor ideal

Pentru calculul puterii active consumate de către un rezistor ideal, trebuie avut în vedere că valoarea curentului ce intervine în formulă este valoarea efectivă:

$$P = R \cdot I^2 > 0 \text{ (putere activă consumată), } [P]_{\text{S.I.}} = 1 \text{ W} \quad (1.80)$$

### b) Bobina electrică

Bobina electrică este un element de circuit constituit dintr-un conductor înfășurat într-un număr de spire. Mărimea caracteristică poartă denumirea de inductivitate (inductanță) a cărei unitate de măsură în SI este *Henry*-ul (H). Inductivitatea este dependentă de numărul de spire, de lungimea conductorului și de proprietățile magnetice ale miezului bobinei. În circuitele electrice, bobina este reprezentată ca în figura 1.32, (a) în domeniul timp, respectiv (b) în domeniul complex.

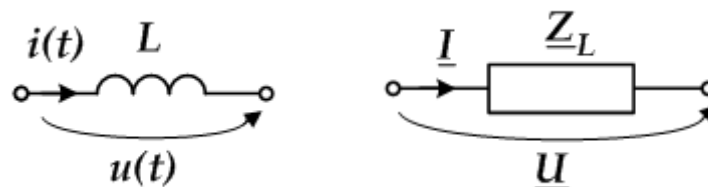


Fig. 1.32. Bobina ideală în domeniul timp (a), respectiv în complex (b)

Relațiile de bază pentru bobină sunt:

$$\begin{aligned} u(t) &= L \cdot \frac{di(t)}{dt} && \text{- ecuația de funcționare în domeniul timp;} \\ \underline{U} &= j\omega \cdot L \cdot \underline{I} = \underline{Z}_L \cdot \underline{I} && \text{- ecuația de funcționare în domeniul complex.} \end{aligned} \quad (1.81)$$

Mărimea  $\omega L$  poartă denumirea de *reactanță inductivă*:  $X_L = \omega L$  [ $\Omega$ ]. Inductivitatea și pulsația unei bobine sunt numere reale, pozitive, deci și reactanța este tot pozitivă. Numărul complex  $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$ , deci  $\underline{U} = \underline{Z}_L \cdot \underline{I} = j\omega \cdot L \cdot \underline{I} = e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot \omega \cdot L \cdot \underline{I}$ , ceea ce face ca **bobina să defazeze curentul cu  $\frac{\pi}{2}$  în urma tensiunii** (fig. 1.33).

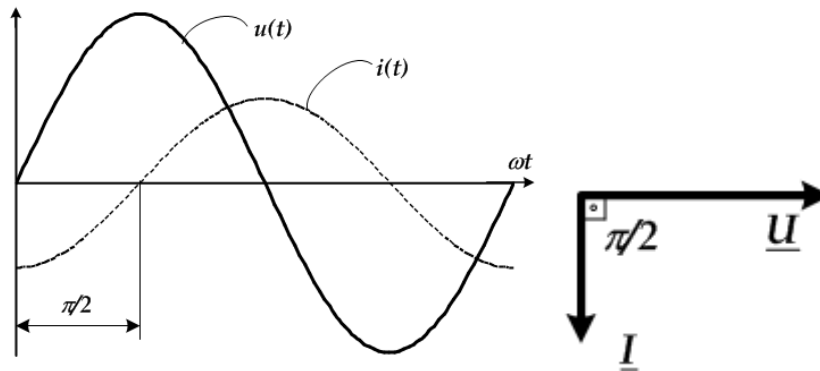


Fig. 1.33. Defazajul între tensiune și curent pentru o bobină ideală

Bobina electrică consumă putere reactivă,  $Q$  (având ca unitate de măsură în sistemul internațional **var** – **volt-ampere reactiv**), iar formula de calcul este următoarea (în care trebuie ținut cont că valoarea curentului electric ce apare în formulă este valoarea efectivă):

$$Q = \omega L \cdot I^2 > 0 \text{ (putere reactivă consumată)} [Q]_{\text{S.I.}} = 1 \text{ var} \quad (1.82)$$

Toate relațiile expuse mai sus se referă la bobina electrică ideală. În practică însă, deoarece bobina este constituită dintr-un conductor (cu o lungime, secțiune și o rezistivitate, deci o rezistență), ne confruntăm cu o bobină reală ce poate fi modelată ca înserierea dintre o bobină ideală și un rezistor ideal (fig. 1.34):

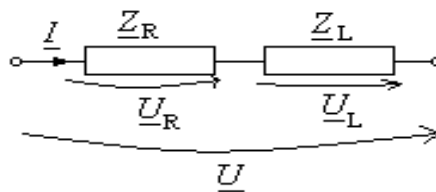


Fig. 1.34. Modelarea unei bobine reale printr-un rezistor ideal și o bobină ideală înseriate, în domeniul complex

Tensiunea la bornele bobinei reale este suma dintre tensiunea la bornele bobinei ideale și tensiunea la bornele rezistorului. Reprezentarea fazorială a curentului și a tensiunii pentru o bobină reală este realizată în figura 1.35.

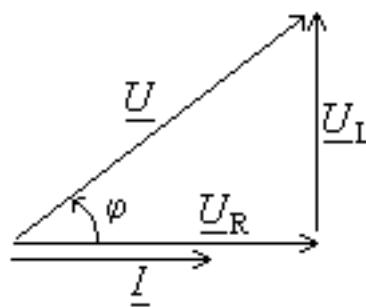


Fig. 1.35. Defazajul între tensiune și curent pentru o bobină reală

### c) Condensatorul electric

Condensatorul electric este un dispozitiv format din două armături conductoare încărcate cu sarcini electrice egale și de semn contrar, între care este plasat un dielectric. Mărimea ce caracterizează condensatorul poartă denumirea de capacitate electrică (unitatea de măsură în SI este *Farad*-ul) și este dependentă de dimensiunile geometrice ale armăturilor, de poziția lor relativă și de proprietățile dielectricului. În circuitele electrice, condensatorul este reprezentat ca în figura 1.36., ( $a$  - în domeniul timp,  $b$  - în domeniul complex).

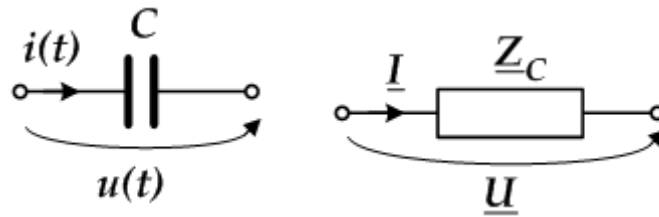


Fig. 1.36. Condensatorul electric, reprezentare în domeniul timp (a), respectiv în complex (b)

Relațiile de bază pentru condensatorul electric sunt:

$$\begin{aligned} i(t) &= C \cdot \frac{du(t)}{dt} && \text{- ecuația de funcționare în domeniul timp;} \\ \underline{U} &= \frac{1}{j\omega \cdot C} \cdot \underline{I} = \underline{Z}_C \cdot \underline{I} && \text{- ecuația de funcționare în domeniul complex.} \end{aligned} \quad (1.83)$$

Mărimea  $\frac{1}{\omega C}$  poartă denumirea de *reactanță capacitivă*:  $X_C = \frac{1}{\omega C}$  [ $\Omega$ ]. Capacitatea unui condensator și pulsația sunt numere reale, pozitive, deci și reactanța este tot pozitivă. Numărul complex  $\frac{1}{j} = e^{-j\frac{\pi}{2}}$ , deci  $\underline{U} = \underline{Z}_C \cdot \underline{I} = \frac{1}{j\omega \cdot C} \cdot \underline{I} = e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{\omega C} \cdot \underline{I}$ , astfel încât **condensatorul defazează curentul cu  $\frac{\pi}{2}$  înaintea tensiunii** (fig. 1.37).

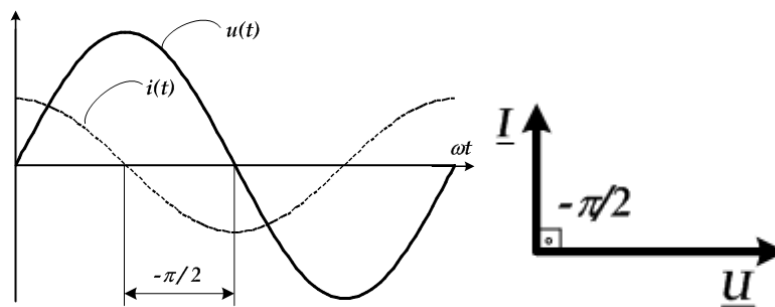


Fig. 1.37. Defazajul între tensiunea și curentul pentru o condensator electric

Condensatorul electric „produce” putere reactivă (în bilanțul puterilor puterea reactivă de la condensator va apărea în cadrul puterii consumate cu semnul minus),  $Q$ , iar formula de calcul este următoarea (în care trebuie ținut cont că valoarea curentului electric ce apare în formulă este valoarea efectivă):

$$Q = -\frac{1}{\omega C} \cdot I^2 < 0 \text{ (putere reactivă produsă) [Q]}_{S.I.} = 1 \text{ var} \quad (1.84)$$

#### d) Elemente active de circuit

În categoria elementelor active de circuit intră sursele de energie electrică, sursa ideală de tensiune, respectiv sursa ideală de curent.

**d1) Sursa ideală de tensiune** se caracterizează prin faptul că indiferent de configurația circuitului acesta oferă la bornele sale o tensiune constantă  $u(t)$  egală cu valoarea tensiunii generatorului  $e(t)$  (fig. 1.38).

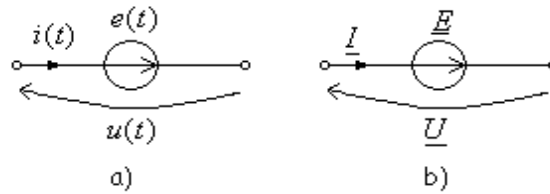


Fig. 1.38. Sursa ideală de tensiune, reprezentare în domeniul timp (a), respectiv în complex (b)

Ecuțiile caracteristice în domeniul timp și în domeniul complex (conform regulii generatorului) sunt:

$$u(t) = e(t) \quad \underline{U} = \underline{E} \quad (1.85)$$

**d2) Sursa ideală de curent** se caracterizează prin faptul că indiferent de configurația circuitului, aceasta injectează în circuit un curent a cărui valoare constantă  $i(t)$  este egală cu valoarea curentului generatorului  $j(t)$  (fig. 1.39).

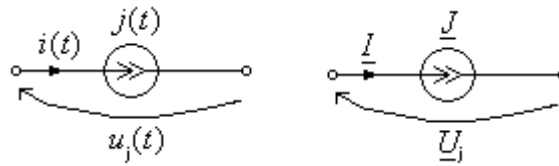


Fig. 1.39. Sursa ideală de curent, reprezentare în domeniul timp (a), respectiv în complex (b)

Ecuția caracteristică atât în domeniul timp, cât și în complex este:

$$i(t) = j(t) \quad \underline{I} = \underline{J} \quad (1.86)$$

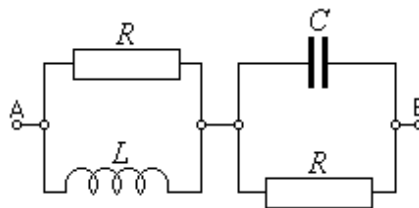
Puterea aparentă complexă generată de sursele de tensiune, respectiv de curent (considerând regula de la generatoare), sunt date de relațiile:

$$\begin{aligned} \underline{S}_e &= \underline{E} \cdot \underline{I}^* & - & \text{ pentru sursa de tensiune;} \\ \underline{S}_j &= \underline{U}_j \cdot \underline{J}^* & - & \text{ pentru sursa de curent.} \end{aligned} \quad (1.87)$$

### F. Aplicație

Să se calculeze impedanța echivalentă între bornele A și B pentru circuitul pasiv din figura următoare, unde se cunosc:

$$R = 2\Omega, L = \frac{40}{\pi} \text{ mH}, C = \frac{10}{\pi} \text{ mF}, f = 50 \text{ Hz}.$$



### G. Metode sistematice de rezolvare a circuitelor în curent alternativ. Metoda ecuațiilor Kirchhoff

Această metodă utilizează teoremele lui Kirchhoff rescrise în domeniul complex. Rezolvarea implică următorul sistem:

*Pasul 1:* Se exprimă mărimile de excitație (sursele de energie) în complex și se calculează impedanțele complexe ale laturilor circuitului;

*Pasul 2:* Se construiește schema echivalentă în complex a circuitului;

*Pasul 3:* Se determină elementele de topologie ale circuitului;

*Pasul 4:* Se aleg sensurile de referință ale curenților prin laturile circuitului;

*Pasul 5:* Pentru un număr  $N-1$  de noduri se vor scrie ecuațiile primei teoreme a lui Kirchhoff:

$$\sum_{k \in n} \underline{I}_k = 0 \quad k = \overline{1, n} \quad (1.88)$$

*Pasul 6:* Se vor scrie pentru buclele în prealabil alese (căror li s-a indicat și un sens de parcurgere)  $B=L-N+1$  ecuații ale teoremei a doua a lui Kirchhoff:

$$\sum_{k \in (p)} \underline{Z}_k \cdot \underline{I}_k = \sum_{k \in (p)} \underline{E}_k \quad p = \overline{1, B} \quad (1.89)$$

Adesea se pot folosi și următoarele notații simplificatoare:

$$\underline{Z}_k = R_k + j\omega L_k - \frac{j}{\omega C_k} \quad (1.90)$$

*Pasul 7:* Se rezolvă sistemul format de  $L$  ecuații cu  $L$  necunoscute.

### **G. Verificarea soluției unui circuit în curent alternativ**

Cheia de verificare și în cazul circuitelor de curent alternativ este (ca și în cazul circuitelor de curent continuu), **bilanțul puterilor**. În acest caz verificarea va consta din următoarele:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_c = \sum_{k=1}^n R_k I_k^2 = \sum_{k=1}^n \operatorname{Re}\{\underline{Z}_k\} I_k^2 \quad - \text{putere activă consumată} \\ Q_c = \sum_{k=1}^n \omega L_k I_k^2 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{\omega C_k} I_k^2 = \sum_{k=1}^n \operatorname{Im}\{\underline{Z}_k\} I_k^2 \quad - \text{putere reactivă consumată} \\ \underline{S}_g = \sum_{k=1}^n \underline{E}_k \underline{I}_k^* + \sum_{k=1}^n \underline{U}_{jk} \underline{J}_k^* = P_g + jQ_g \quad - \text{putere aparentă complexă generată} \end{array} \right.$$

Verificarea bilanțului puterilor în curent alternativ înseamnă satisfacerea ambelor relații din sistemul (1.91):

$$\begin{cases} P_c = P_g \text{ (putere activă generată)} \\ Q_c = Q_g \text{ (putere reactivă generată)} \end{cases} \quad (1.91)$$